

夏期講習 大学受験生数学 レベルチェック【ⅢC:S系】

次の問いに答えよ。(時間：45分 満点：80点)

- (1) 複素数  $z, w$  が  $w = \frac{z}{z-i}$  をみたしている。 $z$  が実数全体を動くとき、 $w$  が動く点の全体は複素数平面上でどのような図形となるか。
- (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( 2 \sin \frac{\pi}{x} - \sin \frac{2\pi}{x} \right)$  を計算せよ。
- (3)  $x > 0$  における  $\frac{\log x}{x}$  の増減を調べることで、 $\sqrt{5}^{\sqrt{7}}$  と  $\sqrt{7}^{\sqrt{5}}$  との大きさを比較せよ。ただし、 $2.7 < e < 2.8$  であることは用いてよい。
- (4)  $\int_0^1 \sqrt{4x-x^2} dx$  を計算せよ。
- (5)  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$  を計算せよ。
- (6) 正の整数  $n$  に対し、 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$  とする。 $I_{n+2}$  を  $n, I_n$  で表せ。
- (7)  $\begin{cases} x = -t^2 + 9 \\ y = -t^2 + 2t + 3 \end{cases} \quad (-1 \leq t \leq 3)$  で表される曲線と  $x$  軸とによって囲まれる図形の面積を求めよ。
- (8) 半径  $r$  の半球型の容器に水が満たされている。この容器を  $30^\circ$  だけ傾けるとどれだけの水が流れ出るか、その体積を求めよ。